josif 2024
16ª JORNADA CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA
13º SIMPÓSIO DE PÓS-GRADUAÇÃO
DO IFSULDEMINAS
ISSN: 2319-0124
REALIZAÇÃO INSTITUTO FEDERAL Sul de Minas Gerais
APOIO CNPq FAPEMIG

NÚMEROS PRIMOS E QUADRADOS PERFEITOS: uma comparação dentro do intervalo de 1 a n

Axel P. RODRIGUES[1]; Jarne D. RIBEIRO[2]

RESUMO

Este trabalho explora a comparação entre a quantidade de números primos e quadrados perfeitos dentro de um intervalo específico, destacando a análise matemática e teórica envolvida. Entre os principais tópicos abordados no trabalho estão: a demonstração matemática por meio de manipulação de desigualdades e cálculo diferencial, a apresentação de lemas e definições, e o estudo de séries convergentes e divergentes. O trabalho ressalta a importância da análise matemática e das propriedades específicas dos números primos e dos quadrados perfeitos para compreender a distribuição e a densidade desses números dentro de um intervalo determinado, contribuindo para uma melhor compreensão da relação entre esses conjuntos numéricos.

Palavras-chave:
Distribuição; Densidade; Desigualdade; Cálculo; Análise.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, foi comparada a quantidade de números primos com a quantidade de quadrados perfeitos dentro do intervalo fechado de 1 a n, onde n é um número natural. Essa comparação foi realizada para responder à seguinte pergunta: dentro do intervalo fechado de 1 a n, existem mais números primos do que quadrados perfeitos?

É importante destacar que a interseção entre o conjunto dos números primos e o conjunto dos quadrados perfeitos é vazia, o que mostra o seguinte resultado:

Teorema 1: Todo número natural maior que 1 pode ser classificado como primo ou composto, e todo quadrado perfeito maior que 1 é um número composto.

Demonstração: Seja n um quadrado perfeito maior que 1, então: $n = k^2 = k.k$. Portanto, n é composto, pois n tem no mínimo 3 divisores positivos: 1, k e n. ■

Outro destaque é que o conjunto dos números primos e dos quadrados perfeitos possuem a mesma cardinalidade, já que são infinitos e estão contidos no conjunto dos números naturais, que é enumerável. Resultado obtido pelo teorema a seguir:

[1]Bolsista PIBIC/CNPq, IFSULDEMINAS – *Campus* Passos. E-mail: axelrodrigues74@gmail.com.
[2]Docente do Superior em Licenciatura em Matemática, IFSULDEMINAS – *Campus* Passos. E-mail: jarne.ribeiro@ifsuldeminas.edu.br.

Teorema 2: Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Demonstração: Sejam A um conjunto enumerável e B $\subset$ A um subconjunto infinito. Como A é enumerável seus elementos podem ser colocados em uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ de termos distintos dois a dois $(a_i \neq a_j \; se \; i \neq j)$. Vamos construir uma sequência $(n_k)_{k \in N}$ da seguinte maneira: Defina n_1 como o primeiro natural tal que $a_{n_1} \in$ B. Tome $n_2$como sendo o menor natural que é maior do que $n_1$tal que $a_{n_2} \in$ B. Tendo encontrado $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ tome n_k como sendo o menor natural que é maior do que n_{k-1} tal que $a_{nk} \in$ B. Como B, por hipótese, é um conjunto infinito, B pode ser visto como uma sequência B = $(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nk}, \ldots)$. É claro que esses termos são distintos dois a dois. Assim obtemos uma função bijetora f : N → B dada por f(k) = a_{n_k}.

Logo, B é enumerável. ■

Contudo em [4], Euler demonstrou que a série dos inversos dos números primos é divergente, enquanto a dos quadrados perfeitos é convergente, visto em [2]. Com essas provas, segundo [1], podemos concluir que os números primos são mais frequentes na reta dos números naturais em comparação com os quadrados perfeitos.

2. MATERIAL E MÉTODOS

O desenvolvimento do trabalho é centrado em pesquisa bibliográfica, utilizando principalmente e-books, artigos e dissertações disponíveis em repositórios digitais, além de livros particulares e da biblioteca do IFSULDEMINAS.

Em seguida, observando a distribuição dos quadrados perfeitos e dos números primos, percebemos que os quadrados perfeitos seguem um padrão regular, enquanto os números primos não apresentam a mesma regularidade. Então, para quantificar a quantidade de quadrados perfeitos e números primos em um intervalo, é introduzido algumas funções. Como a função abaixo, que determina que a quantidade de quadrados perfeitos menores ou iguais a um número n.

Definição 1: $\varepsilon(n) = \#\{a \in N \mid n \geq a = b^2\} = \left[\sqrt{n}\right]$, onde $\left[\sqrt{n}\right]$ representa a parte inteira da raiz quadrada de n.

Levando em consideração que a mesma respeita a seguinte desigualdade $\left[\sqrt{n}\right] \leq \sqrt{n}$.

Para quantificar a quantidade de números primos, é utilizado o teorema abaixo que pode ser visto em NEWMAN, D. J. Simple analytic proof of the prime number theorem. American Mathematical Monthly, v. 87, pp. 693-696, 1980.

Teorema 3 (Números Primos): A quantidade de números primos menores ou iguais a n, é aproximadamente $\frac{n}{ln(n)}$.

Com isso, definimos a segunda função.

Definição 2: $\pi(n) = \#\{p \in P \,|\, p \leq n\} \approx \frac{n}{ln(n)}$, onde P é o conjunto dos números primos.

Com as duas funções definidas introduzimos o corolário abaixo, um corolário do **Teorema 3**, cuja demonstração é encontrada em ROSSER, J. Barkley; SCHOENFELD, Lowell. Approximate Formulas For Some Functions Of Prime Numbers. Illinois J. Math. vol. 6, pp.64-94, 1962.

Corolário 1: A função $\frac{n}{ln(n)}$ é um limitante inferior da função $\pi(n)$, para todo $n \geq 17$.

Isto é $\frac{n}{ln(n)} < \pi(n)$, para todo $n \geq 17$. Então, se provarmos a desigualdade $\sqrt{n} < \frac{n}{ln(n)}$, provamos que no intervalo de 1 a n, existem mais números primos do que quadrados perfeitos, pois $\varepsilon(n) \leq \sqrt{n} < \frac{n}{ln(n)} < \pi(n)$, isso implica que $\varepsilon(n) < \pi(n)$. Contudo, como o **Corolário 1** nos garante o resultado apenas para um número natural maior ou igual a 17. Logo, vamos analisar através da tabela abaixo, as funções $\varepsilon(n)$ e $\pi(n)$ para os primeiros 16 números naturais.

Tabela 1 - Comparação

n	$\varepsilon(n)$	$\pi(n)$	n	$\varepsilon(n)$	$\pi(n)$
1	1	0	9	3	4
2	1	1	10	3	4
3	1	2	11	3	5
4	2	2	12	3	5
5	2	3	13	3	6
6	2	3	14	3	6
7	2	4	15	3	6
8	2	4	16	4	6

Fonte: Autor, 2024.

Após a análise, temos que nem sempre $\pi(n)$ é maior que $\varepsilon(n)$, quando n é menor que 5. Então, como $\frac{n}{ln(n)}$ é um limitante inferior quando n é maior que 16, no principal teorema do artigo provamos que $[\sqrt{n}]$ é menor que $\frac{n}{ln(n)}$, para todo n maior ou igual a 17, isto é, $[\sqrt{n}] < \frac{n}{ln(n)}$, $\forall\, n \geq 17$. Assim com o auxílio da **Tabela 1** mais a demonstração do principal teorema do artigo, provaremos que $\varepsilon(n)$ é menor que $\pi(n)$ para todo n maior ou igual a 5.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Teorema 4 (Principal): Se n é um número natural maior do que 4, então no intervalo fechado de 1 a n, existem mais números primos do que números que são quadrados perfeitos.

Demonstração: Considere a desigualdade

$$\sqrt{n} < \frac{n}{ln(n)}, \text{ assim, } 0 < \frac{n-\sqrt{n}ln(n)}{ln(n)}$$

Como $ln(n) \geq 0, \forall n \geq 1$ e $\sqrt{n} \geq 0,\ \forall n \ \geq\ 0$, então,

$$0 < n - \sqrt{n}\, ln(n) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n}\, lnn \ < \ n,$$

$$ln(n) < \frac{n}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad ln(n) < \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad 0 < \sqrt{n} - ln(n).$$

Considere a função $f(x) = \sqrt{x} - ln(x)$, logo $f(x)$ é contínua em R^{+}, portanto, podemos usar as ferramentas do cálculo diferencial, pois, se a desigualdade for verdadeira para todos os números reais, isso implica que é verdadeira para todos os números naturais, visto que, $N \subset R^{+}$. Derivando $f(x)$ em relação a x obtemos $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$ e igualando a 0, obtemos, $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \ = \ 0 \Rightarrow x \ = \ 4.$

Logo, $(4,\ f(4))$ é um ponto crítico da função f e:

- $\frac{df(x}{dx} < 0$ em $x \in (0, 4)$ pois,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow x^{2} - 4x < 0 \Rightarrow x(x - 4) < 0.$$

Assim f é decrescente para todo $x \in (0, 4)$.

- $\frac{df(x}{dx} > 0$ em $x \in (4, \infty)$ pois,

$$0 < \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < x^{2} - 4x \Rightarrow 0 < x(x - 4).$$

Assim f é crescente para todo $x \in (4, \infty)$.

Portanto, o ponto crítico $(4,\ f(4))$ é um mínimo local e como a f é derivável em todo seu domínio, como $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} - ln(x) = \ + \infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} - ln(x) = + \infty$ o ponto crítico$(4,\ f(4))$ é um mínimo global, isto é, $f(4) \ \leq \ f(x)$, para todo $x \in R^{+}$.

Portanto $0 < \sqrt{x} - ln(x)$, para todo x maior que 0. Logo,$0 < \sqrt{n} - ln(n)$, para todo n natural maior do que 4. Portanto, no intervalo fechado de 1 a n existem mais números primos do que quadrados perfeitos, para todo n natural maior ou igual a 5.

■

4. CONCLUSÃO

Apesar das complexidades e das variações na distribuição dos números primos, a quantidade de números primos sempre supera a de quadrados perfeitos em intervalos fechados de 1 a n, quando n é maior ou igual a 5. A comparação entre números primos e quadrados perfeitos não apenas enriquece nosso entendimento sobre a estrutura dos números naturais, mas também destaca a complexidade e a beleza da matemática. A pesquisa na Teoria dos Números continua a ser um campo fértil para novas descobertas e questionamentos, incentivando a exploração contínua das interações entre diferentes classes de números.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento e apoio fundamental que possibilitaram a realização deste trabalho. O suporte financeiro fornecido pela CAPES foi essencial para o desenvolvimento da pesquisa e para a exploração de temas relevantes na área da matemática.

REFERÊNCIAS

[1] AVILA, Jorge A. J.; MOREIRA, Elielsom D.; GUIMARÃES, Bianca F. Padrões especiais de distribuição dos números primos: o n-quadrado Zeta. Revista Matemática Universitária, v. 1, 2022.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. História da matemática. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

[3] EULER, Leonhard. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 9, pp. 160-188.

[4] NEWMAN, D. J. Simple analytic proof of the prime number theorem. American Mathematical Monthly, v. 87, pp. 693-696, 1980.

[5] ROSSER, J. Barkley; SCHOENFELD, Lowell. Approximate Formulas For Some Functions Of Prime Numbers. Illinois J. Math. vol. 6, pp.64-94, 1962.